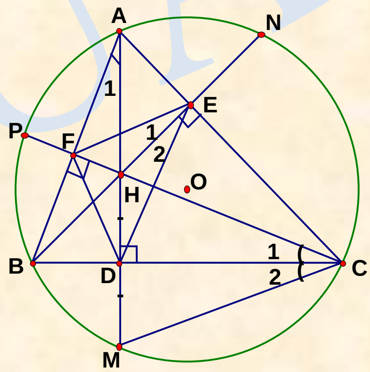
BỘ CÂU HỎI ÔN LUYỆN ĐIỂM 9, 10
Môn TOÁN
KÌ THI TUYỂN SINH VÀO 10 – 2016

Biên soạn: Cao Văn Tuấn – 0975306275

HÌNH HỌC TỔNG HỢP

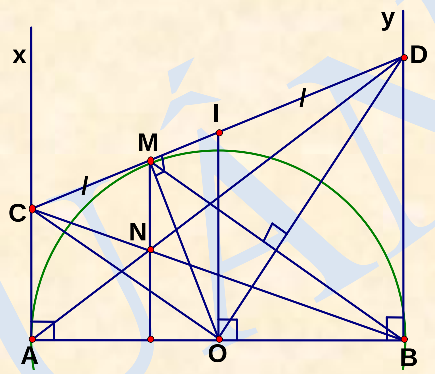
Bài 1: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại
H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P.
Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



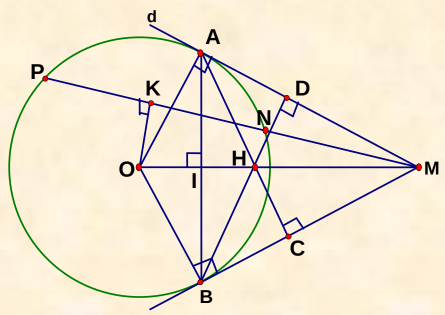
Bài 2: Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

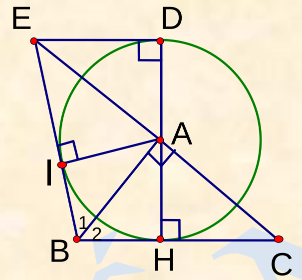
1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle COD = 90^0$.
3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh: OC // BM.
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
6. Chứng minh MN $\perp$ AB.
7. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài 3: Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC $\perp$ MB, BD $\perp$ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

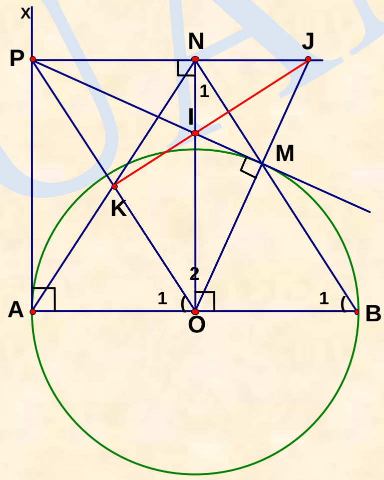
1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.





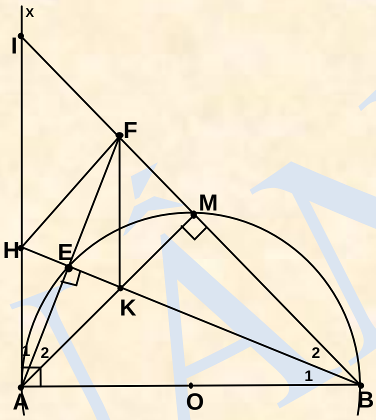
Bài 4: Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh BE = BH + DE.



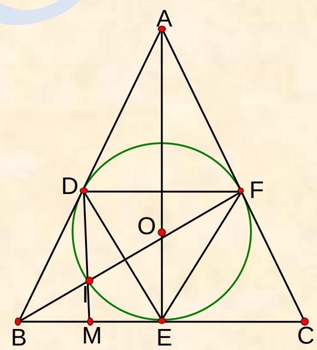
Bài 5: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



Bài 6: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E, cắt tia BM tại F; tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1. Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2. Chứng minh rằng: $AI^2 = IM . IB$.
3. Chứng minh BAF là tam giác cân.
4. Chứng minh rằng: Tứ giác AKFH là hình thoi.
5. Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

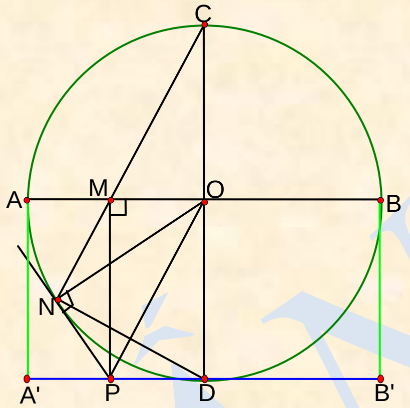


Bài 7: Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh:

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.
2. DF // BC.
3. Tứ giác BDFC nội tiếp.
4. $\frac{BD}{CB}=\frac{BM}{CF}$

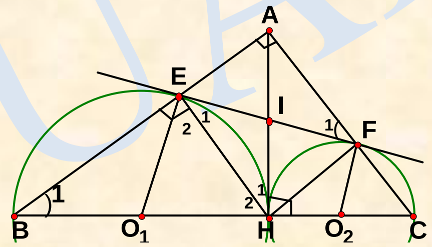
Bài 8: Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh:

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.



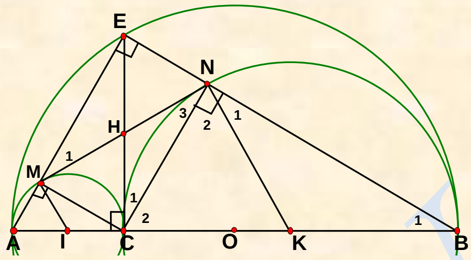
Bài 9: Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A. Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E. Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.



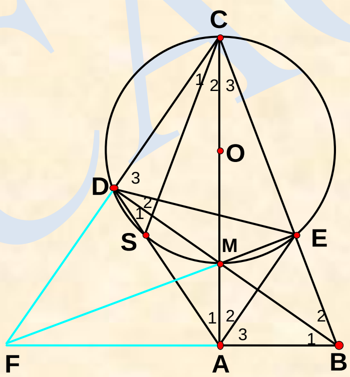
Bài 10: Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 cm, CB = 40 cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các đường tròn (I), (K).

1. Chứng minh EC = MN.
2. Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).
3. Tính MN.
4. Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn.

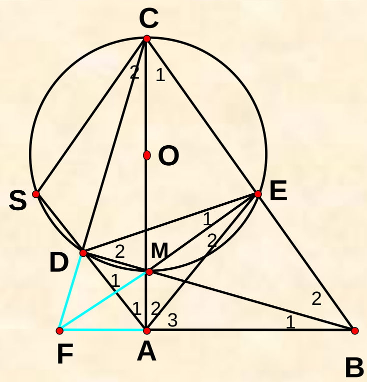


Bài 11: Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. Đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.



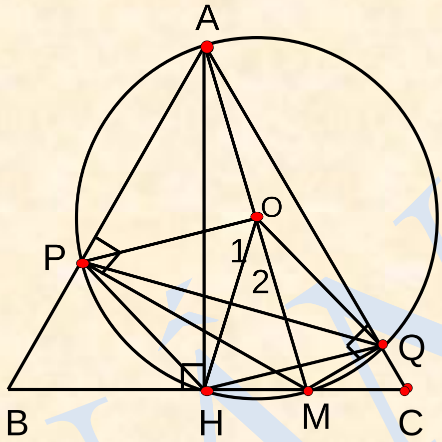
Hình a



Hình b

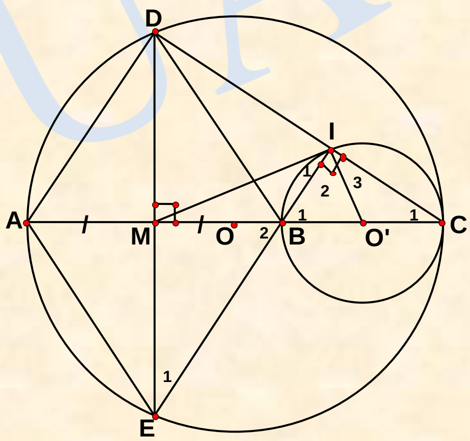
Bài 12: Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H); từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.
3. Chứng minh OH ⊥ PQ.



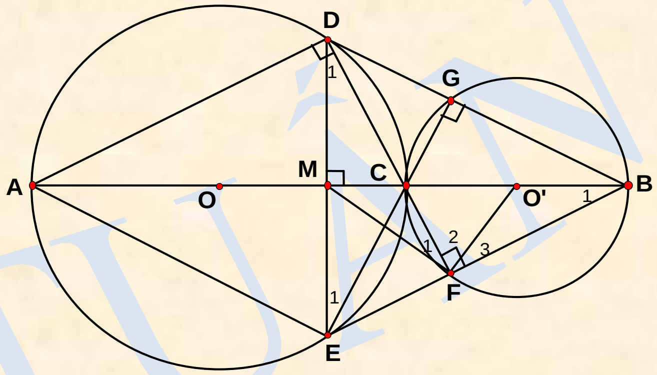
Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O’).



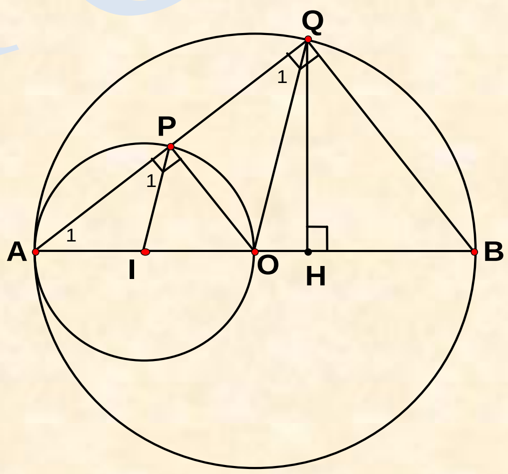
Bài 14: Cho đường tròn (O; R) và (O’; R’) có R > R’ tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O’). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O’) là F, BD cắt (O’) tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O’).



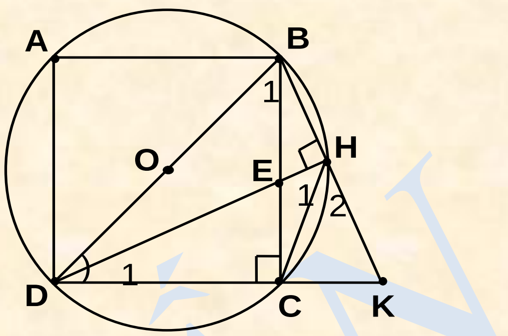
Bài 15: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA. Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh IP // OQ.
3. Chứng minh rằng AP = PQ.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.



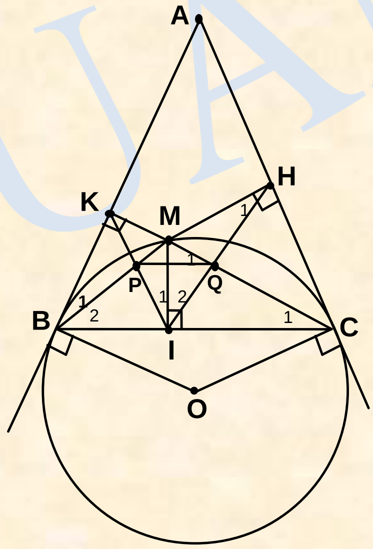
Bài 16: Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp .
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh KC. KD = KH.KB
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?



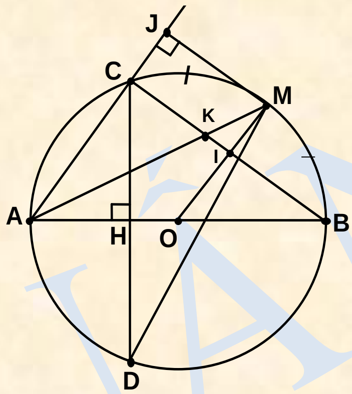
Bài 17: Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì (BC < 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân.
2. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp .
3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$.
4. Chứng minh PQ ⊥ MI.

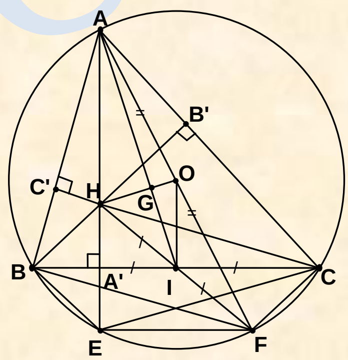


Bài 18: Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung CD ⊥ AB ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh:

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$.
2. AM là tia phân giác của ∠CMD.
3. Tứ giác OHCI nội tiếp.
4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

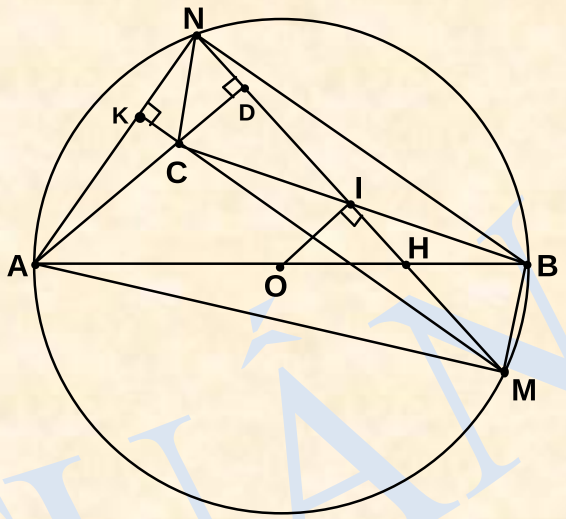


Bài 19: Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.
Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.
E, F nằm trên đường tròn (O).
Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.
Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.



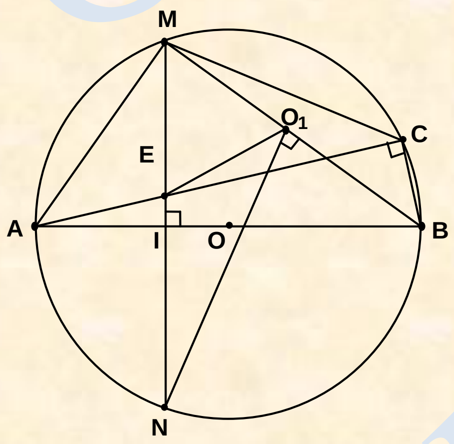
Bài 20: Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

1. Chứng minh khi MN di động, trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.
2. Từ A kẻ Ax ⊥ MN, tia BI cắt Ax tại C. Chứng minh tứ giác CMBN là hình bình hành.
3. Chứng minh C là trực tâm của tam giác AMN.
4. Khi MN quay quanh H thì C di động trên đường nào.
5. Cho AM. AN = $3R^2$, AN = $R\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác AMN.



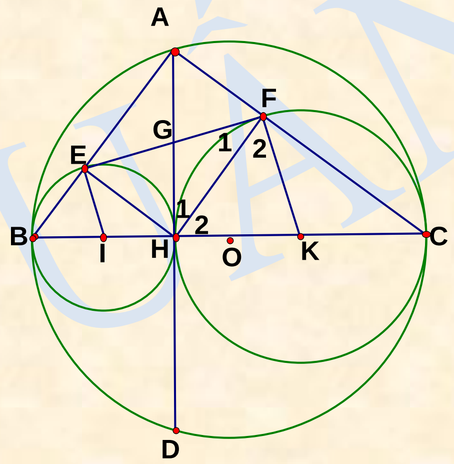
Bài 21: Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = 2/3 AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1. Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp.
2. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
3. Chứng minh AM^2 = AE.AC.
4. Chứng minh AE. AC - AI.IB = AI^2.
5. Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.



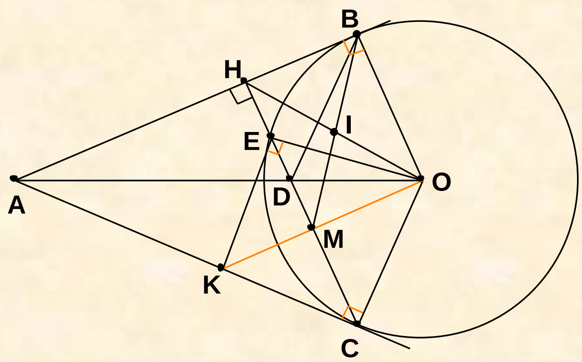
Bài 22: Cho đường tròn (O) đường kính BC, dấy AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

1. Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).
2. Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?.
3. Chứng minh AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
5. Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.



Bài 23: AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R (B, C là tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc AB tại H, cắt (O) tại E và cắt OA tại D.

1. Chứng minh CO = CD.
2. Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.
3. Gọi M là trung điểm của CE, Bm cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.
4. Tiếp tuyến tại E với (O) cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm O, M, K thẳng hàng.



PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC (PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ)

PHƯƠNG PHÁP 1: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG (PHƯƠNG PHÁP LŨY THỪA, ...)

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{5x-3}=\sqrt{3-x}$

2) $\sqrt{5x-3}=3-x$

3) $\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{x-2}=0$

4) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$

5) $\sqrt{x-2}-\sqrt{5x-6}=\sqrt{3x-5}$

6) $\sqrt{8x+1}+\sqrt{3-5x}=\sqrt{7x+4}+\sqrt{2x-2}$

7) $5\sqrt{x-3}+12\sqrt{2-x}=4$

8) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{25-x}=3$

PHƯƠNG PHÁP 2: PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x-4|=0$

2) $\sqrt{25x^2-10x+1}=x-2$

3) $\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{x^2-14x+49}=11$

4) $\sqrt{4x^2+20x+25}+\sqrt{x^2-8x+16}=\sqrt{x^2+18x+81}$

5) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}=4$

6) $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}$

PHƯƠNG PHÁP 3: PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Loại 1: Phương trình có chứa $f(x)$ và $\sqrt{f(x)}$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1) $2x^2-8x-3\sqrt{x^2-4x-5}=12$

2) $2x^2+2x-9=\sqrt{2x^2+4x+6}$

3) $x^2-4x-10-3\sqrt{(x+2)(x-6)}=0$

Loại 2: Phương trình có chứa $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$ và $\sqrt{AB}$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

1) $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$

2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-2$

3) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x$

Loại 3: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Bài 5: Giải các phương trình sau:

1) $x^2+3x-x\sqrt{x^2+2}=1+2\sqrt{x^2+2}$

2) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$

3) $(1-4x)\sqrt{4x^2+1}=8x^2+2x+1$

4) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

Loại 4: Đặt một hoặc hai ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp

Bài 6: Giải các phương trình sau:

1) $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$

2) $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$

3) $x^2+3\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^4-x^2+1}$

4) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Loại 5: Đặt một hoặc nhiều ẩn phụ đưa về hệ phương trình

Bài 7: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{5-x}+\sqrt{x(5-x)}=5$

2) $3\sqrt{2x+1}-6\sqrt{x+4}+\sqrt{(2x+1)(x+4)}+7=0$

3) $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ 4) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$ 5) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$

PHƯƠNG PHÁP 4: PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Bài 8: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x(x+1)}$ 2) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$

3) $7\sqrt{x-1}-\sqrt{x^3-x^2}+x-1=0$ 4) $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$

5) $\sqrt{x+3}+\dfrac{4x}{\sqrt{x+3}}=4\sqrt{x}$ 6) $\sqrt{x^2+8x+15}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+5}-6$

7) $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$

PHƯƠNG PHÁP 5: PHƯƠNG PHÁP NHÂN LIÊN HỢP

Bài 9: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ 2) $\sqrt{x+1}+4x^2=1+\sqrt{3x}$

3) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ 4) $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-3x-3}-\sqrt{x^2-3x+4}$

PHƯƠNG PHÁP 6: PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

Bài 10: Giải các phương trình sau:

1) $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$ 2) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}=3x^2-12x+14$

3) $\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}=x^2-12x+38$ 4) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+21}=5-2x-x^2$

Gợi ý:

1) $x^2+6x+9+3x+10+1=2\sqrt{3x+10}\Leftrightarrow (x+3)^2+\left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)^2=0\\ \left(\sqrt{3x+10}-1\right)^2=0\end{cases}$

2) Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho vế trái, ta được

$VT^2=\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x}\right)^2\le(1^2+1^2)(x-3+5-2x)=4\Rightarrow VT\le 2$

Mặt khác ta có: $3x^2-12x+14=3(x-2)^2+2\ge 2$

Khi đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x-3}}{1}=\dfrac{\sqrt{5-2x}}{1}\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

3) Áp dụng BĐT Bunhiacopxki cho vế trái, ta được

$VT^2=\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{x-5}\right)^2\le(1^2+1^2)(7-x+x-5)=4\Rightarrow VT\le 2$

Mặt khác ta có: $x^2-12x+38=(x-6)^2+2\ge 2$

Khi đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{7-x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x-5}}{1}\\ x-6=0\end{cases}\Leftrightarrow x=6$

4) $VT=\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+21}=\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+16}\ge\sqrt{4}+\sqrt{16}=6$

$VP=5-2x-x^2=-(x+1)^2+6\le 6$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x=-1$

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC TRONG ĐỀ THI TUYỂN SINH CỦA HÀ NỘI

Câu 1 ***(Năm học 1992 – 1993):*** Giải phương trình $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{2+\sqrt{x}}{2x}$

Câu 2 ***(Năm học 1994 – 1995):*** Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ thoả mãn phương trình sau:

$$5x-2\sqrt{x}(2+y)+y^2+1=0$$

Câu 3 *(Năm học 2009 – 2010)*: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{2}\left(2x^3+x^2+2x+1\right)$

Câu 4 *(Năm học 2010 – 2011)*: Giải phương trình $x^2+4x+7=(x+4)\sqrt{x^2+7}$.

BÀI TOÁN TỔNG HỢP (CHỨNG MINH BĐT, TÌM GTLN, GTNN,...)

Bài 1: Cho $a\neq 0$. Giả sử *b*, *c* là nghiệm của phương trình: $x^2-ax-\frac{1}{2a^2}=0$. Chứng minh rằng:

$$b^4+c^4\geq 2+\sqrt{2}$$

Bài 2: Cho hai số dương *x*, *y* có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{3}{4xy}$.

Bài 3: Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thỏa mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$. Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$M=\frac{3}{4}+\left(x^8-y^8\right)\left(y^9+z^9\right)\left(z^{10}-x^{10}\right)$$

Gợi ý:

Từ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x+y+z}=0\Rightarrow \frac{x+y}{xy}+\frac{x+y+z-z}{z(x+y+z)}=0$$

$$\Rightarrow (z+y)\left[\frac{1}{xy}+\frac{1}{z(x+y+z)}\right]=0\Rightarrow (x+y)\left(\frac{zx+zy+z^2+xy}{xyz(x+y+z)}\right)=0$$

$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0$$

Ta có: $\begin{cases} x^8-y^8=(x+y)(x-y)\left(x^2+y^2\right)\left(x^4+y^4\right)\\ y^9+z^9=(y+z)\left(y^8-y^7z+y^6z^2-...+z^8\right)\\ z^{10}-x^{10}=(z+x)\left(z^4-z^3x+z^2x^2-zx^3+x^4\right)\left(z^5-x^5\right)\end{cases}$

Vậy $M=\frac{3}{4}+(x+y)(y+z)(z+x).A=\frac{3}{4}$.

Bài 4: Cho các số thực x,y,z thoả mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F=xy+2yz+zx$$

Gợi ý:

Ta có $\begin{cases}(x+y+z)^2\geq 0\\ (y+z)^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} xy+yz+zx\geq -\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{-1}{2}\\ yz\geq -\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{x^2-1}{2}\geq\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow F\geq\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}=-1$

Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi $\begin{cases}x+y+z=0\\ y+z=0; x=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là – 1.

Bài 5: Với hai số thực không âm *a*, *b* thỏa mãn $a^2+b^2=4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\mathrm{M}=\frac{ab}{a+b+2}$$

Gợi ý:

$$\mathrm{M}=\frac{ab}{a+b+2}=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2(a+b+2)}=\frac{(a+b)^2-4}{2(a+b+2)}=\frac{(a+b-2)(a+b+2)}{2(a+b+2)}=\frac{a+b-2}{2}$$

Ta có $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$

Vậy $\mathrm{M}\le\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}-2}{2}=\frac{\sqrt{2.4}-2}{2}=\sqrt{2}-1$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là $\sqrt{2}-1$, xảy ra khi $a=b=\sqrt{2}$.

Bài 6: Cho các số thực dương *x*, *y* thỏa mãn $x+y\ge 3$. Chứng minh rằng: $x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\ge\frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Gợi ý:

Cách 1:

Với $x,y>0$ và $x+y\ge 3$.

Ta có: $\mathrm{VT}=x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\left[x+y+\left(x-2+\frac{1}{x}\right)+\left(y-4+\frac{4}{y}\right)+6\right]$

$$\frac{1}{2}\left[x+y+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\sqrt{y}-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)^2+6\right]\ge\frac{1}{2}(3+6)=\frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0\\ \sqrt{y}-\frac{2}{\sqrt{y}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.

Cách 2:

Với $x,y>0$ và $x+y\ge 3$.

Ta có: $x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\left[x+y+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{4}{y}\right)\right]\ge\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{x.\frac{1}{x}}+2\sqrt{y.\frac{4}{y}}\right)=\frac{9}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{x}\\ y=\frac{4}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$ (vì $x,y>0$).

Bài 7: Cho 2015 số nguyên dương $a_1;a_2;a_3;...;a_{2015}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{2015}}}\ge 89$$

Chứng minh rằng trong 2015 số nguyên dương đó, luôn tồn tại ít nhất 2 số bằng nhau.

Gợi ý:

Giả sử không tồn tại hai số bằng nhau mà $a_1;a_2;a_3;...;a_{2015}$ nguyên dương.

Không làm mất tính tổng quát giả sử $a_1>a_2>a_3>...>a_{2015}$

Nên $a_1\ge 1;\ a_2\ge 2;\ \dots;\ a_{2015}\ge 2015$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{2015}}}\le\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}$ (1)

Ta có $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}\le 1+\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+...+\frac{2}{\sqrt{2014}+\sqrt{2015}}$ (2)

Mà $1+\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+...+\frac{2}{\sqrt{2014}+\sqrt{2015}}=2\sqrt{2015}-1<89$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{2015}}}<89$ (trái với giả thiết).

Vậy trong 2015 số nguyên dương đó tồn tại ít nhất 2 số bằng nhau.

Bài 8: Cho *x, y, z* là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện: $5x^2+2xyz+4y^2+3z^2=60$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=x+y+z$.

Gợi ý:

Ta có: $5x^2+2xyz+4y^2+3z^2=60$

$\Leftrightarrow 5x^2+2xyz+4y^2+3z^2-60=0$

$\Delta_x=(yz)^2-5(4y^2+3z^2-60)=(15-y^2)(20-z^2)$

Vì $5x^2+2xyz+4y^2+3z^2=60\Rightarrow\begin{cases}4y^2\le 60\\3z^2\le 60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2\le 15\\z^2\le 20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-15\ge 0\\z^2-20\ge 0\end{cases}\Rightarrow\Delta_x\ge 0$

$$\Rightarrow x=\frac{-yz+\sqrt{(15-y^2)(20-z^2)}}{5}\le\frac{-yz+\frac{1}{2}(15-y^2+20-z^2)}{5}$$ (Bất đẳng thức Cô si)

$$\Rightarrow x\le\frac{-2yz+35-y^2-z^2}{10}=\frac{35-(y+z)^2}{10}$$

$$\le\Rightarrow x+y+z\le\frac{35-(y+z)^2+10(y+z)}{10}=\frac{60-(y+z-5)^2}{10}\le 6$$

Dấu = xảy ra khi $\begin{cases}y+z-5=0\\15-y^2=20-z^2\\x+y+z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 6 đạt tại $x=1;\ y=2;\ z=3$.

Bài tập tương tự: Cho *x, y, z* là các số thự thỏa mãn điều kiện: $\frac{3x^2}{2}+y^2+z^2+yz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $B=x+y+z$.

Bài 9: Cho hai số dương *x, y* thỏa $x\ge 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{2x^2+y^2-2xy}{xy}$

Gợi ý:

Ta có: $P=\frac{2x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{x^2+y^2+x^2-2xy}{xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{x^2-2xy}{xy}$

$$=\frac{4x^2+4y^2}{4xy}+\frac{x^2-2xy}{xy}=\frac{3x^2}{4xy}+\frac{x^2+4y^2}{4xy}+\frac{x(x-2y)}{xy}$$

$$=\frac{3}{4}.\frac{x}{y}+\frac{x^2+4y^2}{4xy}+\frac{x-2y}{y}\ge\frac{3}{4}.2+1+0=\frac{5}{2}$$

Vì $\begin{cases}\frac{x}{y}\ge 2\\x^2+4y^2\ge 2\sqrt{x^2.4y^2}=4xy\\x-2y\ge 0\\y>0\end{cases}\Rightarrow P_{\min}=\frac{5}{2}$ *khi* $x=2y$.

Bài 10: Cho $a,\ b,\ c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6$.

Gợi ý:

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương, ta có: $\begin{cases} a^5+\frac{1}{a}\ge 2a^2 \\ b^5+\frac{1}{b}\ge 2b^2 \\ c^5+\frac{1}{c}\ge 2c^2 \end{cases}\quad (1)$

Suy ra $a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Mặt khác $\begin{cases} a^2+1\ge 2a \\ b^2+1\ge 2b \\ c^2+1\ge 2c \end{cases}$. Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 2\left(a+b+c\right)-3=2.3-3=3\quad (2)$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow a^5+b^5+c^5+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 6\Rightarrow \left(đpcm\right)$.

Bài 11:

1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-6x-6}=3\sqrt{\left(2-x\right)^5}+\left(7x-19\right)\sqrt{2-x}.$
2. Xét các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{T}=\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c}$$

Gợi ý:

1. Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x^2-6x-6\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\le 1-\sqrt{3}$.

Với $x\le 1-\sqrt{3}$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3x^2-6x-6}=3\left(2-x\right)^2\sqrt{2-x}+\left(7x-19\right)\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6}=\sqrt{2-x}\left(3x^2-5x-7\right)\Leftrightarrow \sqrt{3x^2-6x-6}-\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}\left(3x^2-5x-8\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-5x-8}{\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x}}=\sqrt{2-x}\left(3x^2-5x-8\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2-5x-8=0 \\ 1=\sqrt{2-x}\left(\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x}\right) \end{array}\right.$$

(do $\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x}>0,\ \forall x\le 1-\sqrt{3}$).

+ $3x^2-5x-8=0\Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn đk) hoặc $x=\frac{8}{3}$ (không thỏa mãn điều kiện)

+ $1=\sqrt{2-x}\left(\sqrt{3x^2-6x-6}+\sqrt{2-x}\right)\Leftrightarrow 1=2-x+\sqrt{3x^2-6x-6}.\sqrt{2-x}$

$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{3x^2-6x-6}.\sqrt{2-x}$ (*)

Vì $x\le 1-\sqrt{3}$ nên $x-1<0\le \sqrt{3x^2-6x-6}.\sqrt{2-x}$ do đó (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

2. Ta có: $a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)\quad \forall a;b\in\mathbb{R}$

Thật vậy $a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a^3-b^3\right)\ge 0\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0$ (luôn đúng $\forall a,b\in\mathbb{R}$)

Do đó $a^4+b^4+c\ge ab\left(a^2+b^2\right)+c\Leftrightarrow a^4+b^4+c\ge ab\left(a^2+b^2\right)+abc^2>0$ (vì $\begin{cases} a;b;c>0 \\ abc=1 \end{cases}$)

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c}{ab\left(a^2+b^2\right)+abc^2}$ (vì $c>0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c}{ab\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c^2}{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{c}{a^4+b^4+c} \le \dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (1)$

Tương tự $\begin{cases} \dfrac{b}{a^4+c^4+b} \le \dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (2) \\ \dfrac{a}{b^4+c^4+a} \le \dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (3) \end{cases}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức $(1),(2)$ và (3) ta có:

$$\frac{a}{b^4+c^4+a}+\frac{b}{a^4+c^4+b}+\frac{c}{a^4+b^4+c} \le \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

$\Rightarrow \mathrm{T} \le 1 \quad \forall a;b;c>0$ thỏa mãn $abc=1$.

Với $a=b=c=1$ thì $\mathrm{T}=1$.

Vậy GTLN của T là 1, xảy ra khi $a=b=c=1$.